SOMMAIRE

Vous trouverez dans ce fichier :

- le règlement de la compétition

- des consignes pour le déroulement
  de l'épreuve de découverte 2025 ;

- le sujet de l'épreuve de découverte 2025 ;

- des éléments de solutions ;
- des pistes d'exploitations pour la classe et extensions ;
- une proposition de barème ;
- une grille de mots-clés, objectifs, compétences, etc pour chaque exercice, utiles pour une recherche ultérieure dans la classification des exercices sur le site internet

Par ailleurs, nous vous informons que nous relançons le <u>concours de propositions d'exercices</u> à destination des professeurs.

<u>Toutes idées ou propositions d'exercices (même non abouties) sont à envoyer à</u> : msf.co@ac-strasbourg.fr

Si vous le souhaitez, vous pouvez aussi envoyer quelques lignes concernant le déroulement de cette épreuve de découverte (impressions, réussites, échecs, difficultés, suggestions, …) à l'adresse ci-dessus.

Mathématiques SANS Frontières

RÈGLEMENT DE LA COMPÉTITION MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES SECTEURS D'ALSACE ET CLASSES ISOLÉES

A. Cadre général

Mathématiques sans Frontières est une compétition qui s'adresse à des classes de troisième et de seconde. L'épreuve consiste à résoudre collectivement dix exercices pour le niveau 3^{e} et treize pour le niveau 2de. Ce n'est pas une compétition individuelle.
Les classes doivent être des classes constituées pour l'enseignement des mathématiques de l'année en cours ; elles ne peuvent pas être des classes constituées spécifiquement pour la compétition Mathématiques sans Frontières.
Toutefois, la présence d'un petit nombre d'élèves correspondants étrangers est autorisée lors de l'épreuve définitive, si elle n'entraine pas une augmentation significative de l'effectif de la classe. Il ne pourra en aucun cas s'agir d'une classe entière de correspondants. Le professeur surveillant l'épreuve devra mentionner sur le bilan la présence de correspondants étrangers en précisant leur nombre. Les correspondants étrangers ayant participé à l'épreuve ne recevront pas de prix.
Mathématiques sans Frontières est une compétition donnant lieu à un palmarès : toutes les précautions doivent être prises pour éviter les fuites et les tricheries. **L'épreuve définitive se déroule obligatoirement à une date et dans un créneau horaire qui ont été définis l'année précédente en assemblée internationale**. En cas d'indisponibilité de la classe à la date fixée, **l'épreuve peut être passée après cette date mais jamais avant.**

Organisation de l'épreuve définitive :

- Chaque classe participante compose dans une salle banalisée qui n'est ni le CDI ni une salle informatique.
- Les élèves pourront être surveillés par tout professeur de l'établissement, y compris leur professeur de mathématiques. Toutes les classes d'un même établissement doivent composer sur le même créneau horaire.
- Les élèves s'organisent comme ils le souhaitent : ils peuvent parler entre eux, circuler dans la salle mise à leur disposition, travailler en groupes, utiliser le tableau, … en veillant à ne pas gêner les classes voisines.
- Chaque classe rend **une feuille-réponse par exercice** ; **celle-ci porte la mention non résolue, le cas échéant**. La solution de l'exercice en langue étrangère doit être rédigée dans une des langues dans lequel il est énoncé.
- Aucun élève ne peut aller chercher quoi que ce soit à l'extérieur de la salle, une fois l'épreuve commencée.

Matériel autorisé :

- Calculatrices (*)
- Instruments de dessin
- Dictionnaires et atlas (dictionnaire et atlas papier ; forme électronique exclue)
- Dictionnaires bilingues (dictionnaire papier ; forme électronique exclue)
- Petit matériel de papeterie et feuilles de brouillon
- Manuels scolaires de la classe et cahiers des élèves

(*) Les calculatrices doivent être autonomes (non reliées au secteur). Si elles possèdent un moyen de communiquer, celui-ci doit être désactivé.

Matériel non autorisé :

- Téléphones, tablettes et tout appareil permettant de communiquer.
- Traducteurs.
- Ordinateurs (sauf pour les sections professionnelles).

Les équipes d'organisation se réservent le droit de disqualifier toute classe n'ayant pas respecté le règlement de la compétition.

B. Compléments pour la catégorie jumelage

Une classe de troisième et une classe de seconde du lycée de secteur peuvent s'associer pour participer en jumelage à la compétition Mathématiques sans Frontières. Les classes doivent être des classes constituées pour l'enseignement de mathématiques de l'année en cours.

- Chaque classe est divisée en deux demi-classes équilibrées, tous les élèves des deux classes devant participer.
- Deux demi-classes de niveaux différents constituent ensemble le regroupement A, les deux autres demi-classes constituent le regroupement B ; les élèves des différents niveaux sont ainsi invités à travailler ensemble.
- Les deux regroupements composent dans deux salles séparées et rendent chacun les feuilles réponse pour l'ensemble des exercices de l'épreuve.
- Les correcteurs cumulent les points des deux regroupements pour établir le palmarès commun aux deux classes, spécifique à la catégorie jumelage.

À noter :

- Les deux regroupements doivent traiter chacun les treize exercices.
- Les deux regroupements ne peuvent pas communiquer entre eux.
- Les deux regroupements composent au même moment.

MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES
*CONSIGNES POUR L'ÉPREUVE DE DÉCOUVERTE 3^e^ et 2^de^*

Épreuve à organiser avant le 7 mars 2025

Préambule

Cette épreuve ne compte pas pour le classement final ; elle doit permettre d'entraîner la classe à la **compétition finale du 13 mars 2025.**
Pour que cet entraînement soit formateur, il est souhaitable que le professeur de mathématiques surveille sa classe au moins pendant la 1ère heure et qu'il assiste les élèves dans l'organisation de leur recherche. Il peut apporter son aide pour lever les blocages et leur permettre d'aboutir.

Déroulement de l'épreuve

Les élèves s'organisent comme ils le souhaitent pour travailler ; ils peuvent parler entre eux, circuler dans la salle mise à leur disposition, travailler en groupe, utiliser le tableau, etc. en veillant à ne pas gêner les autres classes.

Rôle du professeur

- Il remettra les feuilles d'énoncés aux élèves (une par élève).
- ***Il signalera aux élèves des classes concourant dans la catégorie 3^e^ qu'ils n'ont pas à traiter les exercices 11, 12 et 13 et aux élèves des classes concourant dans la catégorie jumelage et dans la catégorie 2^de^ qu'ils doivent les traiter, en les rendant attentifs aux deux versions de l'exercice 13.***
- Il pourra aider les élèves à :
  - ✓ faire une lecture approfondie des énoncés et des consignes données pour chaque exercice ;
  - ✓ constituer des groupes ;
  - ✓ choisir des méthodes et des stratégies ;
  - ✓ confronter les avis et à critiquer les solutions avant la rédaction définitive ;
  - ✓ favoriser au maximum la participation de chaque élève et rappeler que même des solutions partielles (à défaut d'une solution complète) seront examinées.
- Une fois qu'il aura corrigé, le professeur pourra faire un bilan avec la classe afin de préparer au mieux l'épreuve officielle.

Cette année, aucune saisie en ligne des résultats de l'épreuve de découverte n'est demandée.
Cependant, si vous le souhaitez, il est possible d'envoyer quelques lignes concernant cette épreuve : vos impressions et celles de vos élèves, les réussites, échecs, difficultés, suggestions, … à l'adresse : msf.co@ac-strasbourg.fr
Attention, le concours de conception de l'affiche n'est pas reconduit pour cette année.

Si vous avez des idées d'exercices, vous pouvez les envoyer à l'équipe de conception du sujet, ainsi, vous verrez peut-être votre exercice dans une prochaine édition !

De nombreuses ressources pour la classe, issues du concours sont accessibles et utilisables directement depuis notre site internet.
Rappel de l'adresse du site d'inscription : https://applications.ac-strasbourg.fr/msf/
Rappel de l'adresse du site internet : http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/

ACADÉMIE DE STRASBOURG
Liberté
Égalité
Fraternité

Compétition interclasses de 3e et de 2de
organisée avec le concours de l'inspection pédagogique régionale de mathématiques de l'Académie de Strasbourg

Mathématiques Sans Frontières

- ✓ **Rendre une seule feuille-réponse par exercice.**
- ✓ **Toute trace de recherche sera prise en compte.**
- ✓ **Le soin, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements seront pris en compte.**

ÉPREUVE DE DÉCOUVERTE ÉDITION 2025

Exercice 1 7 pts
Tik-Tak

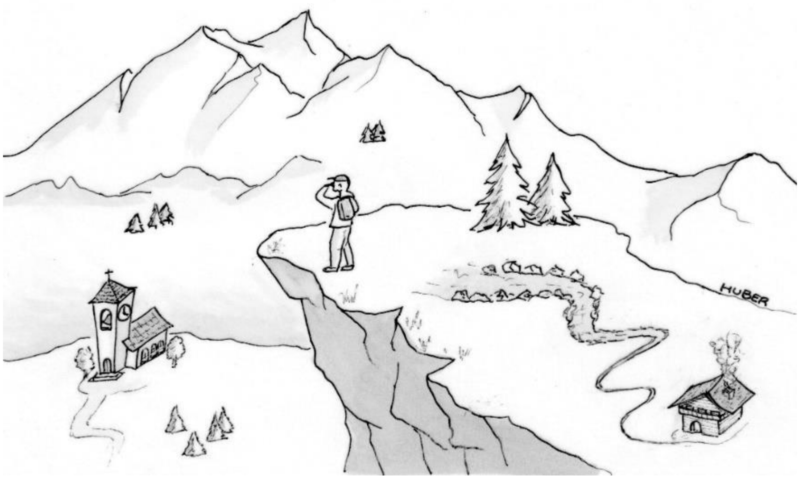
Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Jean ist in die Berge gefahren. Er verbringt das Wochenende in einer Hütte im Tal. Dort hat er weder Strom noch Handy-Empfang.
Ohne Uhr und Mobiltelefon weiß Jean in der Hütte nicht, wie spät es ist. Es gibt dort zwar eine batteriebetriebene Wanduhr, aber sie ist stehengeblieben.
Jean möchte die Wanduhr wieder richtig stellen. Neue Batterien hat er dabei. Er weiß, dass es im nächsten Dorf eine Kirche mit einer Kirchturmuhr gibt. Um die Uhrzeit abzulesen, steigt er auf einen Hügel. Von dort kann er die Kirchturmuhr sehen. Der Weg auf den Hügel ist steil, und so braucht Jean für den Aufstieg doppelt so lang wie für den Abstieg.

Erklärt, wie Jean vorgehen muss, um die Wanduhr in der Hütte so genau wie möglich zu stellen.

Jean trascorre un fine settimana in un rifugio in montagna in fondo a una valle. Il rifugio non ha né elettricità né rete telefonica.
Giunto sul posto, senza orologio né telefono, Jean non ha possibilità alcuna di conoscere l'ora. Nel rifugio c'è un orologio a pila, fermo, che non si può spostare.
Jean ha con sé delle pile nuove e spera di riuscire a regolare l'orologio sull'ora corretta.
Sa che nel villaggio vicino c'è una chiesa con un orologio. Sale, quindi, sulla cima di una collina da cui può vedere l'orologio per leggere l'ora indicata in un tempo trascurabile e scende immediatamente. Nella salita, data la ripidità, impiega il doppio del tempo rispetto alla discesa.

Spiegate come Jean possa procedere per regolare l'orologio del rifugio sull'ora corretta con la maggiore precisione possibile.



Jean spends a weekend in a mountain chalet at the bottom of a valley. This cottage has no electricity and no telephone network.
Once there, without a watch or phone, Jean has no way of knowing the time. In the chalet there is a battery-operated clock, which has stopped, and which cannot be moved.

In his belongings, he has brand new batteries. He wants to set this clock to the correct time.

He knows that there is a church with a clock in the nearest village. To read the time on its bell tower, he climbs to the top of a hill from where he can see it. Since the hill has a steep slope, it takes twice as long to go up as it does to go down.

Explain how John can go about setting the clock in the chalet to the correct time as accurately as possible.

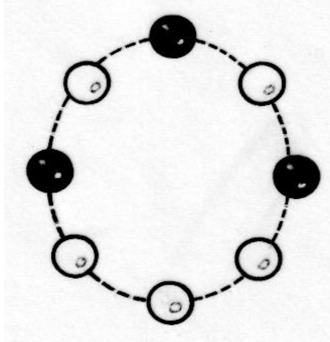
Jean pasa un fin de semana en un chalé de montaña en el fondo de un valle. Este chalé no tiene electricidad y ninguna red telefónica. Una vez llegado al sitio, sin reloj ni teléfono, Jean no tiene ningún medio para saber la hora. En el chalé hay un reloj de pared de pilas, parado, que no podemos trasladar. Entre sus cosas hay pilas nuevas. Quiere poner este reloj en hora. Sabe que hay una iglesia con un reloj en el pueblo más cercano. Para leer la hora en su campanario, sube a la cima de una colina desde donde ve el campanario. Como la cuesta para subir la colina es empinada, tarda el doble de tiempo en subir que en bajar.

Explica como Jean puede proceder para poner en hora el reloj del chalé de la manera más precisa posible.

Exercice 2 — 5 pts
Colliers

Marion réalise des colliers chacun composé de cinq perles blanches et trois perles noires.
La figure ci-contre montre un exemple.

Dessiner les différents colliers de perles que Marion peut réaliser.



Exercice 3 — 7 pts
Carré de touches

Laura choisit au hasard quatre touches adjacentes formant un carré, parmi les touches de 1 à 9 du clavier numérique de sa calculatrice.
Ensuite, elle appuie successivement sur chacune de ces quatre touches en commençant par n'importe laquelle, mais en tournant toujours dans le sens des aiguilles d'une montre.
Elle peut ainsi écrire quatre nombres à quatre chiffres différents.
Elle se souvient du critère de divisibilité suivant : *« Soit **abcd** un nombre à quatre chiffres. Si a – b + c – d est égal à zéro alors **abcd** est divisible par 11 ».*

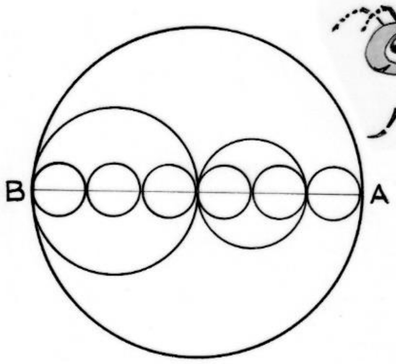
Elle énonce la proposition suivante : « Les quatre nombres ainsi obtenus sont tous divisibles par 11 quel que soit le carré de touches choisi. »

En appelant n le premier chiffre tapé, démontrer cette proposition en utilisant le critère de divisibilité.

Exercice 4 — 5 pts
Fourmidable

Une fourmi doit aller du point A au point B en ne suivant que des arcs de cercles. Les centres de tous les cercles sont alignés et AB = 12.

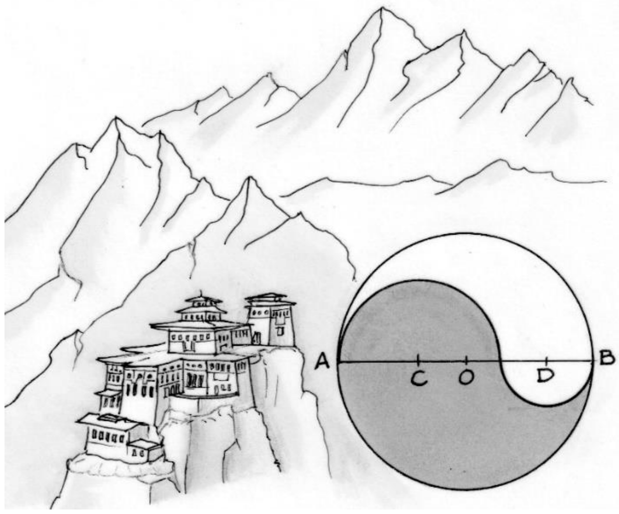
Calculer la plus courte longueur des trajets.



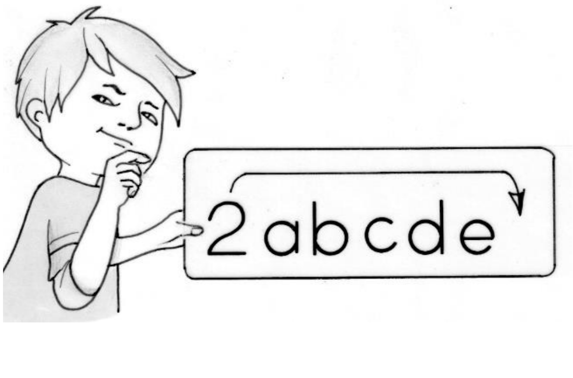
Exercice 5 — 7 pts
Côté obscur

Dans un monastère de l'Himalaya se trouve un disque étrange de diamètre 1 m. Il représente l'équilibre des énergies sur terre. Quand tout va bien, les deux parties, claire et sombre, ont la même aire. Depuis quelque temps, le côté sombre gagne en énergie. Sur le disque, l'aire de la partie sombre est 1,5 fois plus grande que l'aire de la partie claire.

Calculer le rayon AC.
Dessiner ce disque à l'échelle 1/10.



Exercice 6 — 5 pts
Le début de la fin



Un nombre à six chiffres commence par le chiffre 2.
Si je déplace le chiffre 2 à la fin du nombre, le nombre à six chiffres obtenu est plus grand de 461 214 que le premier nombre.

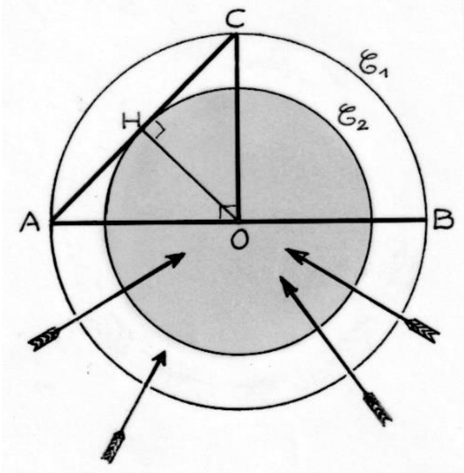
Trouver le nombre de départ. Expliquer.

Mathématiques SANS Frontières

Exercice 7 — 7 pts
Partage ciblé

Pour la kermesse de son école, Samuel envisage de fabriquer une cible pour un jeu de lancer de fléchettes.
Sa cible sera constituée de deux cercles concentriques définissant deux zones l'une de couleur blanche et l'autre de couleur grise. Par souci d'égalité des chances, il souhaite que ces deux zones aient la même aire.
Il commence par tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon 20 cm. Pour tracer le cercle $\mathcal{C}_2$, il réalise les constructions indiquées sur le dessin.

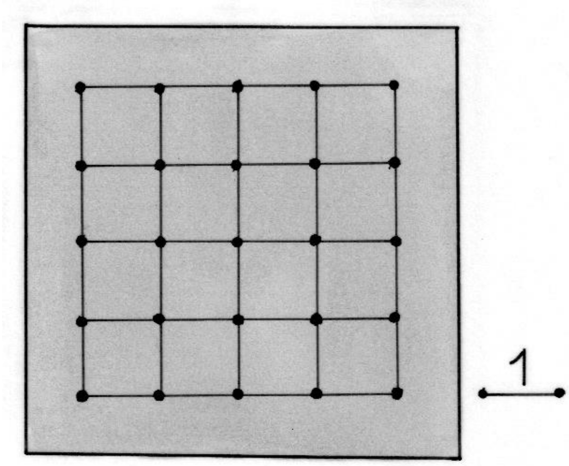
Tracer, à l'échelle 1/2, la cible avec les deux zones en détaillant votre programme de construction étape par étape. Les zones grise et blanche ont-elles la même aire ? Justifier.



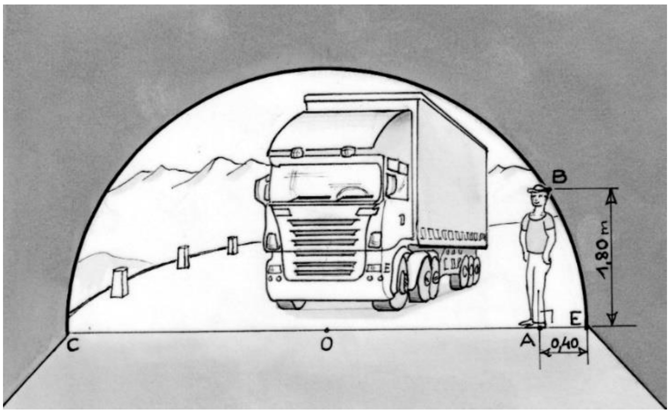
Exercice 8 — 5 pts
Points²

Sur ce quadrillage, on a placé 25 points sur un carré de côté 4 unités.
On peut tracer beaucoup de carrés dont les sommets sont des points du quadrillage.

Donner toutes les dimensions possibles de ces carrés.



Exercice 9 — 7 pts
Les routes de l'impossible



Un chauffeur de camion aimerait traverser un tunnel de forme semi-circulaire de centre O.
Il s'inquiète car la hauteur du tunnel n'est pas indiquée. Il sort du camion.

Il se place au point A et prend deux mesures :
EA = 0,40 m et AB = 1,80 m. [AB] est perpendiculaire au sol. Le camion mesure 2,40 m de largeur et 4,10 m de haut.

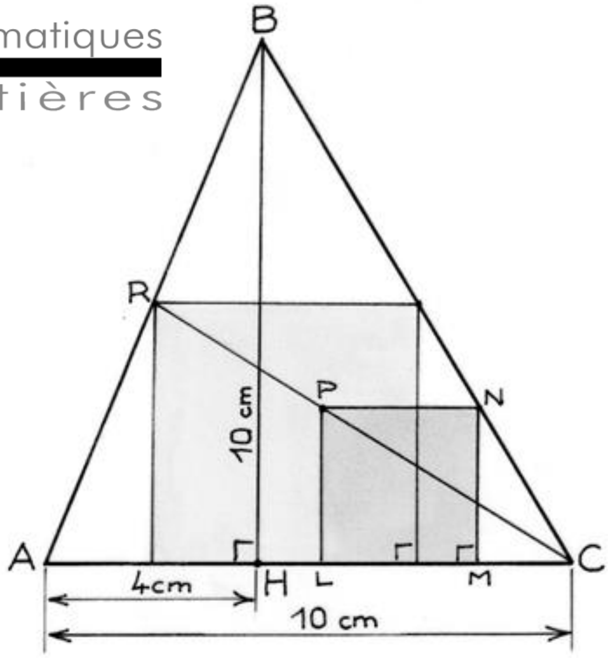
Calculer la hauteur du tunnel puis expliquer si le camion peut le traverser.

Mathématiques SANS Frontières

Exercice 10 — 10 pts
Carrément grandiose

Soit un triangle ABC de base AC= 10 cm et de hauteur BH = 10 cm.
La figure ci-contre permet de construire le plus grand carré à l'intérieur du triangle ABC dont un côté repose sur la base [AC].
On considère un carré LMNP dont les sommets L et M sont sur [AC] et dont le sommet N est sur [BC]. La droite (CP) coupe [AB] en R.
R est un des sommets du plus grand carré qui répond au problème.

Construire la figure.
Calculer la longueur du côté de ce carré. Expliquer votre démarche.



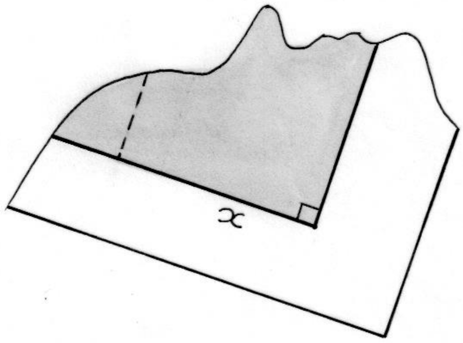
SPÉCIAL SECONDE

Exercice 11 5 pts
Jeu habile

Julia et Frieda jouent avec cinq billes rouges et cinq billes bleues indiscernables au toucher.
Frieda répartit les dix billes dans deux sachets opaques. Julia pioche, sans regarder, une bille de chaque sachet.
Frieda gagne si les deux billes sont rouges.

Comment Frieda doit-elle répartir les billes entre les deux sachets pour avoir le plus de chance de gagner ? Expliquer votre réponse.

Exercice 12 7 pts
Ça déchire !



Sur le bout de papier déchiré ci-contre, il reste un morceau d'une figure dont le périmètre est $10\,x + 4$ et l'aire $5\,x^2 + 4\,x$.

Tracer une figure avec ses dimensions en fonction de x qui pourrait répondre aux contraintes. Justifier.

Exercice 13 10 pts
2nde GT
Triplets

Un triplet pythagoricien, noté (*a, b, c*) est formé de trois nombres entiers *a*, *b* et *c* tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
Ce sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.
On obtient tous les triplets pythagoriciens (*a, b, c*) à l'aide des formules :

$a = m^2 - n^2$

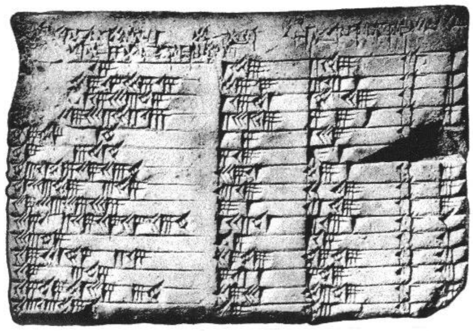
$b = 2mn$

$c = m^2 + n^2$

où *m* et *n* sont des entiers positifs non nuls et *m* supérieur à *n.*

Un triplet (*a, b, c*) est dit <u>primitif</u> si *a*, *b* et *c* n'ont qu'un seul diviseur commun positif 1.

Calculer le triplet pythagoricien primitif (*a, b, c*) obtenu avec m = 5 et n = 4.
Trouver les quatre triplets pythagoriciens primitifs obtenus avec b = 2024.



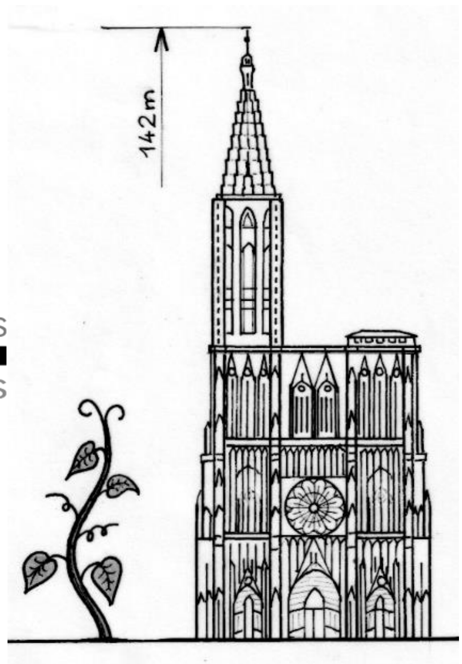
Tablette babylonienne – Plimpton 322

Exercice 13 10 pts
2nde PRO
Haricot mathémagique

Jacques a planté un haricot magique au ras du sol. Le matin du 1er avril, la petite pousse mesure 0,5 cm.
Chaque matin, Jacques remarque que le haricot a doublé de hauteur.
La cathédrale de Strasbourg a une hauteur de 142 m.

Au matin de quel jour, la hauteur du haricot magique sera-t-elle supérieure à la hauteur de la cathédrale de Strasbourg ?

L'utilisation du tableur est conseillée pour la résolution de cet exercice.



Mathématiques sans Frontières

Exercice 1 LV– *Tik-Tak* – 7 points –
Thème : Logique
Principaux éléments mathématiques travaillés : Durée et horaire, logique, résolutions de problème, raisonnement logico-déductif

Corrigé :

Jean met les piles dans l'horloge du chalet et règle l'heure à 00h00.
Il monte jusqu'au point de vue, note l'heure affichée sur le clocher et redescend immédiatement à son chalet par le même chemin.
Arrivé au chalet, il lit l'heure sur sa pendule et en déduit le temps qu'il a mis pour faire l'aller-retour. Comme la montée prend deux fois plus de temps que la descente, il en déduit que le temps du retour est un tiers du temps de l'aller-retour. Il peut mettre à l'heure sa pendule. Il rajoute le tiers du temps de l'aller-retour à l'heure qu'il a lue sur le clocher.

Thème : Logique
Compétences : Chercher Communiquer
Principaux éléments mathématiques travaillés : Durée et horaire, logique, résolutions de problème.
Capacités : Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler et les organiser, calculer une durée et un horaire, expliquer sa démarche et son raisonnement.
Tâches de l'élève : Raisonnement logico-déductif, rédiger son raisonnement.

En Français :

Jean passe un week-end dans un chalet de montagne au fond d'une vallée. Ce chalet n'a pas d'électricité et aucun réseau téléphonique.
Une fois arrivé sur place, sans montre ni téléphone, Jean n'a aucun moyen de connaître l'heure. Dans le chalet il y a une horloge à pile, arrêtée, qu'on ne peut pas déplacer.
Dans ses affaires, il a des piles toutes neuves. Il souhaite régler cette horloge à la bonne heure.
Il sait qu'il y a une église avec une horloge dans le village le plus proche. Pour lire l'heure sur son clocher, il monte au sommet d'une colline d'où il aperçoit le clocher. Comme la pente est raide pour monter sur la colline, il met deux fois plus de temps pour monter que pour descendre.

Expliquer comment Jean peut procéder pour régler l'horloge du chalet sur la bonne heure le plus précisément possible.

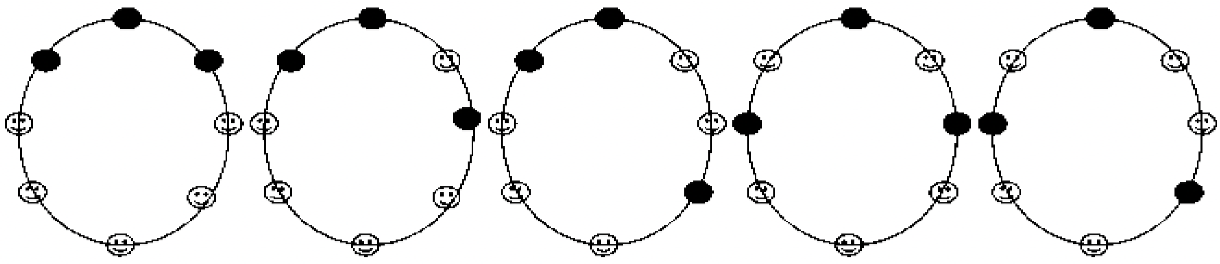
Barème proposé :
3 points pour la langue.
4 points pour le raisonnement

Exercice 2 – *Colliers* – 5 points –
Thème : Stratégie
Principaux éléments mathématiques travaillés : Logique, organisation spatiale.

<u>Corrigé</u>

Un seul collier peut avoir trois perles noires qui se suivent.
Avec deux perles noires qui se suivent, la troisième peut se positionner de deux manières :
soit elle sépare les blanches en une et quatre, soit en deux et trois.
Avec les trois perles noires séparées, les blanches peuvent se répartir en une, une et trois, soit en une, deux et deux.

La représentation des cinq colliers possibles :



Compétences : Chercher
Capacités : Tester, étudier plusieurs organisations spatiales.
Tâches de l'élève : Raisonner par essais-erreurs, établir une liste exhaustive de cas favorables.

Barème proposé : 1 point par collier

Exercice 3 – *Carré de touches* – 7 points –
Thème : Nombres et calculs
Principaux éléments mathématiques travaillés : Addition, équations, critère de divisibilité, arithmétique.

Corrigé

On choisit d'appeler n le premier nombre écrit en haut à gauche du carré de touches choisi. On peut aussi traiter le problème en choisissant d'appeler n le nombre tapé, cela conduit à d'autres calculs.

Avec les nombres choisis sur les lignes de la calculatrice (sauf la ligne du zéro), on obtient quatre possibilités :

n	$n+1$
$n-3$	$n-2$

$n+1$	$n-2$
n	$n-3$

$n-2$	$n-3$
$n+1$	n

$n-3$	n
$n-2$	$n+1$

Le calcul algébrique $a - b + c - d$ des quatre sommes ainsi obtenues donne toujours 0, donc il est divisible par 11.

$n - (n+1) + (n-2) - (n-3) = 0$

$(n+1) - (n-2) + (n-3) - n = 0$

$(n-2) - (n-3) + n - (n+1) = 0$

$(n-3) - n + (n+1) - (n-2) = 0$

La proposition de Laura est vraie quels que soient les quatre chiffres choisis sur le clavier de la calculatrice.

Commentaire :

Cette propriété fonctionne encore avec un rectangle (pas forcément un carré)

Compétences : Chercher, calculer, raisonner.
Capacités : Calculer en utilisant le langage algébrique, démontrer, tester.
Tâches de l'élève : Calculer, disjonction des cas.

Barème proposé :
4 points (1 par carré) pour les calculs mis en équation
2 points pour les vérifications du critère
1 point pour la rédaction de la conclusion

Démonstration du critère de divisibilité par 11

Le critère :

Soit abcd un nombre à 4 chiffres.

Si $a - b + c - d$ est égal à zéro alors abcd est divisible par 11

Une démonstration :

$$\begin{aligned} abcd &= 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d \\ &= 1001\,a - a + 99\,b + b + 11\,c - c + d \\ &= 11 \times (91\,a + 9\,b + c) - (a - b + c - d) \end{aligned}$$

Si $a - b + c - d = 0$ alors abcd est divisible par 11

Remarque : la règle s'étend à des nombres de plus de 4 chiffres !

Exercice 4 – *Fourmidable* – 5 points –
Thème : Grandeurs et mesures – Configuration du plan
Principaux éléments mathématiques travaillés : Longueur (périmètre) d'un cercle, diamètre et rayon d'un cercle.

Corrigé

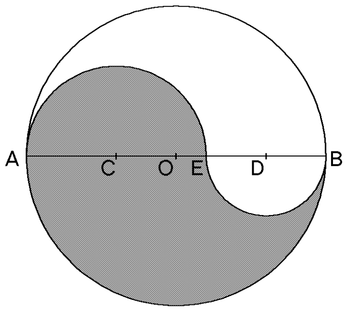
Pour chacun des petits cercles de rayon 1, la longueur du demi-cercle est π.
Pour les autres demi-cercles de rayon 2 la longueur du demi-cercle est 2π.
Pour ceux de rayon 3 la longueur est 3π.
Et enfin pour le grand cercle la longueur est 6π.
De nombreux parcours sont possibles en combinant les arcs de cercle, sans retour en arrière.
Quel que soit le chemin emprunté la fourmi parcourra une longueur de 6π.

Compétences : Calculer
Capacités : Calculer et comparer des grandeurs géométriques.
Tâches de l'élève : Calculer, comparer, disjonction des cas.

Barème proposé :
3 points pour les calculs
2 points pour la rédaction de la conclusion

Exercice 5 – *Côté obscur* – 7 points -
Thème : Grandeurs et mesures – Configuration du plan – Equations
Principaux éléments mathématiques travaillés : Aire d'un disque, rayon, construction, compas, cercle, échelle, équations.

<u>Corrigé</u>



On pose OA = OB = R et CA = r , alors

$$DB = \frac{(AB - 2AC)}{2} = R - r$$

Aire de la partie sombre :

$$\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi (R - r)^2}{2} = \pi R \times r$$

Aire de la partie claire :

$\pi R^2 -$ aire de la partie sombre $= \pi R^2 - \pi R \times r$

L'aire de la partie sombre est 1,5 fois plus grande que l'aire de la partie claire :

$\pi R \times r = 1{,}5\left(\pi R^2 - \pi R \times r\right)$

$\pi R \times r = 1{,}5\ \pi R^2 - 1{,}5\ \pi R \times r$

$2{,}5\ \pi R \times r = 1{,}5\ \pi R^2$

$r = \frac{1{,}5R}{2{,}5} = \frac{1{,}5 \times 0{,}5}{2{,}5} = 0{,}3$

Le rayon AC vaut 0,3 m.

Compétences : Calculer Raisonner
Capacités : Construire une figure plane, utiliser une échelle, calculer l'aire d'un disque, calculer en utilisant le langage algébrique, choisir et mettre en relation des cadres (numérique et géométrique), résoudre algébriquement une équation.
Tâches de l'élève : Réaliser une figure précise, calculer une aire par décomposition en sous-figures, mise en équation d'un problème géométrique.

Barème proposé :
1 pt pour l'expression de DB en fonction de OB et AC.
2 pts pour le calcul de l'aire sombre
1 pt pour une mise en équation du problème
1 pt pour la conclusion
2 pts pour le dessin à l'échelle

Exercice 6 – *Le début de la fin* – 5 points –
Thème : Nombres et calculs
Principaux éléments mathématiques travaillés : Addition posée, calcul, nombres entiers, décomposition décimale

Corrigé

L'opération posée suivante doit être vérifiée avec a ; b ; c ; d et e étant des nombres entre 0 et 9.

	2	a	b	c	d	e
+	4	6	1	2	1	4
=	a	b	c	d	e	2

On fait les constations et déductions suivantes :
e + 4 = 2 ou 12 ou 22 ; d'où **e = 8** avec une retenue de 1
1 + d + 1 = 8 ; d'où **d = 6** sans retenue
c + 2 = 6 ; d'où **c = 4** sans retenue
b + 1 = 4 ; d'où **b = 3** sans retenue
a + 6 = 3 ; d'où **a = 7** avec 1 comme retenue
Dernière vérification : 1 + 2 + 4 doit être égal à 7 ; ce qui est le cas !
Vérification finale : 273468 + 461214 = 7344682

Le nombre de départ est : 273 468

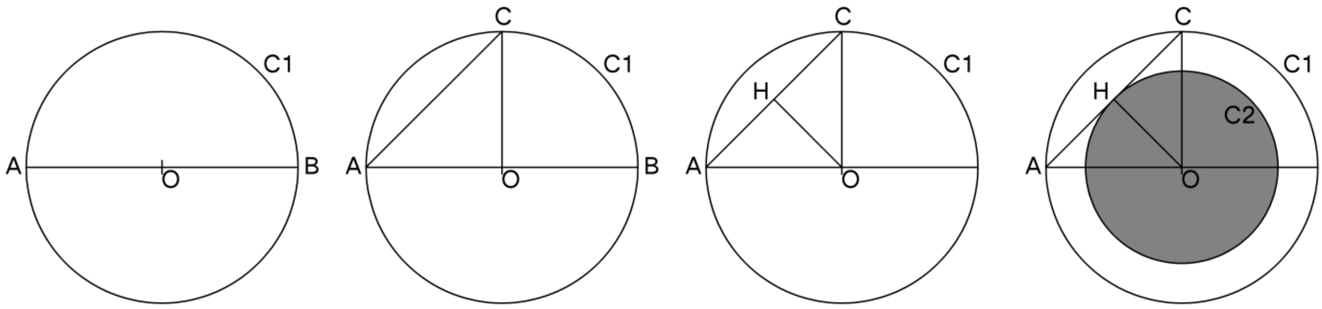
Compétences : Chercher Représenter Raisonner
Capacités : Résoudre algébriquement une équation, mettre un problème en équation, tester.
Tâches de l'élève : Poser une addition, calculer, raisonner, raisonner par essais-erreurs, tâtonner.

Barème proposé :
1 pt pour chaque chiffre trouvé avec justification Une réponse sans explication vaut 2 points.

Exercice 7 – *Partage ciblé* – 7 points –
Thème : Grandeurs et mesures – Configuration du plan
Principaux éléments mathématiques travaillés : Aire d'un disque, cercle, compas, agrandissement, réduction, théorème de Pythagore, triangles semblables, programme de construction, hauteur, angles dans le triangle rectangle isocèle, construction, échelle.

Corrigé

Un programme de construction possible :
Tracer un cercle C_1 de centre O et de rayon 10 cm (échelle 1/2), puis un diamètre [AB].
Tracer un rayon [OC] perpendiculaire à [AB], puis le segment [AC].
Tracer la hauteur [OH] du triangle ACO.
Tracer le cercle C_2 de centre O et de rayon [OH].



L'aire de C_1 est $\pi\times AO^2$;
L'aire de C_2 est $\pi\times OH^2$;
Le triangle OAC est rectangle isocèle, ses angles à la base mesurent 45°.
Or HAO est aussi rectangle avec un angle de 45°, donc il est isocèle.
En appliquant Pythagore au triangle HAO, on a $HA^2 + HO^2 = AO^2$
Comme $HA^2 = HO^2$, on a $2HO^2 = AO^2$
L'aire de $C_1 = \pi \times 2\ HO^2 = 2 \times (\pi \times HO^2) = 2 \times$ Aire de C_2.
L'aire de C_2 vaut bien la moitié de celle de C_1.
Les zones grise et blanche ont bien la même aire, chacune valant la moitié de celle de C_1.

Les zones grise et blanche ont la même aire.

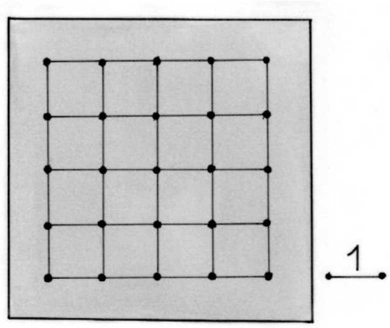
Compétences : Représenter Raisonner Communiquer
Capacités : Construire une figure plane, utiliser des théorèmes et des propriétés géométriques pour calculer des longueurs, calculer l'aire d'un disque, extraire des sous-figures, produire un programme de construction.
Tâches de l'élève : Réaliser une construction précise, justifier, extraire des figures, utiliser des théorèmes et des propriétés géométriques, rédiger.

Barème proposé :
2 pts pour la construction
2 pts pour le programme
3 pts pour la démonstration

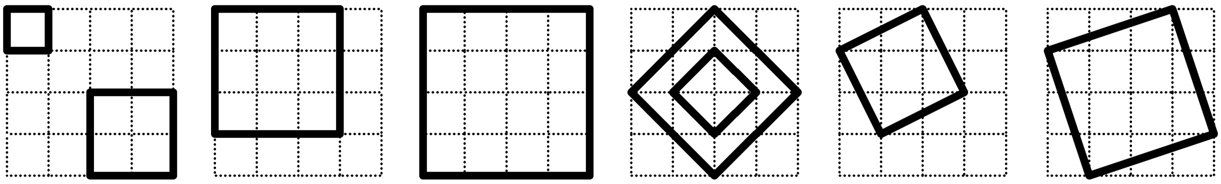
Exercice 8 – *Points²* – 5 points –
Thème : Grandeurs et mesures – Configuration du plan
Principaux éléments mathématiques travaillés : Théorème de Pythagore, carré, diagonale, racine carrée, triplets pythagoriciens.

Corrigé

Le quadrillage forme un carré de côté 4.
Soit *c* la mesure du côté d'un carré dont les sommets sont des points du quadrillage.



Voici les différents carrés que l'on peut tracer :



c = 1 *c* = 2 *c* = 3 *c* = 4 *c* = $\sqrt{2}$ *c* = $\sqrt{5}$ *c* = $\sqrt{10}$
c = $2\sqrt{2}$

On peut tracer 8 carrés de dimensions différentes 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$

Commentaire :
Pour prolonger l'exercice, on peut poser la question :
Combien de carrés différents est-il possible de tracer ?

Pour c = 1 : 16 carrés	*Pour c =* $\sqrt{2}$ *: 9 carrés*
Pour c= 2 : 9 carrés	*Pour c =* $2\sqrt{2}$ *: 1 carré*
Pour c = 3 : 4 carrés	*Pour c =* $\sqrt{5}$ *: 8 carrés*
Pour c = 4 : 1 carré	*Pour c =* $\sqrt{10}$ *: 2 carrés*

On peut tracer en tout 50 carrés différents.

Compétences : Chercher Représenter Calculer
Capacités : Utiliser des propriétés géométriques pour calculer des longueurs, calculer avec des nombres de manière exacte, choisir et mettre en relation des cadres (numérique et géométrique).
Tâches de l'élève : Calculer en utilisant le théorème de Pythagore, établir une liste exhaustive de cas favorables.

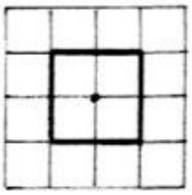
Barème proposé :
1 pt pour les carrés dont les côtés sont entiers, (la moitié si juste le dessin) 2 pts pour les carrés dont les côtés sont $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ (la moitié si juste le dessin) 1 pt pour le carré dont le côté est $\sqrt{5}$ (la moitié si juste le dessin) 1 pt pour le carré dont le côté est $\sqrt{10}$ (la moitié si juste le dessin)

<u>Complément : Le théorème de Pick (1859-1942)</u>
permet de déterminer l’aire de chaque carré

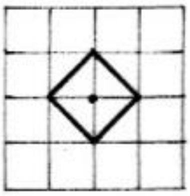
Aire d’un domaine délimité par un polygone à coordonnées entières :

$$\boldsymbol{A = I + \frac{R}{2} - 1}$$

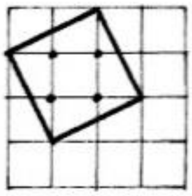
Où I est le nombre de points intérieurs et R le nombre de points situés sur le polygone.



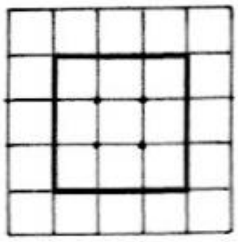
$$A = 1 + \frac{8}{2} - 1$$
$$A = 4$$



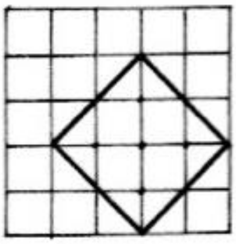
$$A = 1 + \frac{4}{2} - 1$$
$$A = 2$$



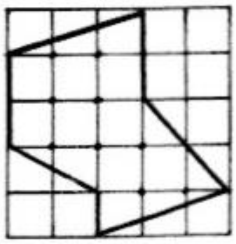
$$A = 4 + \frac{4}{2} - 1$$
$$A = 5$$



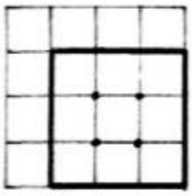
$$A = 4 + \frac{12}{2} - 1$$
$$A = 9$$



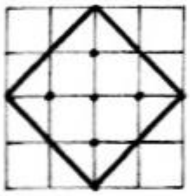
$$A = 5 + \frac{8}{2} - 1$$
$$A = 8$$



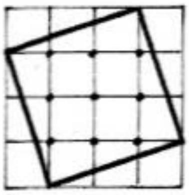
$$A = 9 + \frac{10}{2} - 1$$
$$A = 13$$



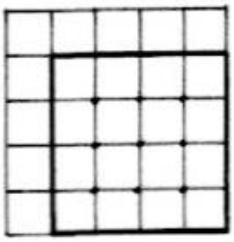
$$A = 4 + \frac{12}{2} - 1$$
$$A = 9$$



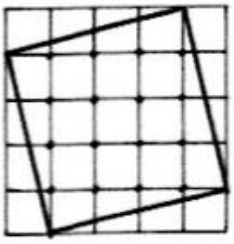
$$A = 5 + \frac{8}{2} - 1$$
$$A = 8$$



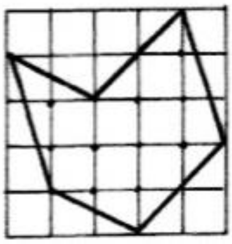
$$A = 9 + \frac{4}{2} - 1$$
$$A = 10$$



$$A = 9 + \frac{16}{2} - 1$$
$$A = 16$$



$$A = 16 + \frac{4}{2} - 1$$
$$A = 17$$

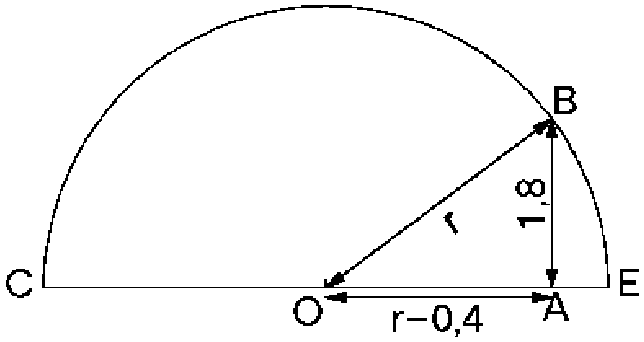


$$A = 10 + \frac{8}{2} - 1$$
$$A = 13$$

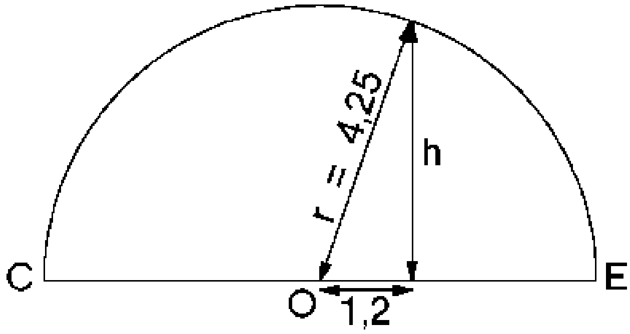
Exercice 9 – *Les routes de l'impossible* – 7 points
Thème : Grandeurs et mesures – Configuration du plan – Equations
Principaux éléments mathématiques travaillés : Pythagore, équations, distances,

Corrigé

La première chose à faire est de trouver le rayon du tunnel.
On peut appliquer Pythagore dans le dessin ci-contre :
$(r-0,4)^2 + 1,8^2 = r^2$
La résolution de cette équation permet de trouver le rayon r = 4,25m.



Si le camion passe exactement au milieu du tunnel, il a le plus de chance de traverser.
Un deuxième croquis est nécessaire pour voir si la hauteur du tunnel à cet endroit est suffisante.
Le théorème de Pythagore donne : $h^2 + 1,2^2 = 4,25^2$
En résolvant l'équation, on trouve une hauteur h de 4,077 m,
soit moins que les 4,10 m du camion, donc il ne passera pas.
Le camion ne pourra pas passer sous le tunnel.



Compétences : Représenter Raisonner Communiquer
Capacités : Mettre un problème en équation, Résoudre algébriquement une équation, utiliser des propriétés géométriques pour calculer des longueurs, choisir et mettre en relation des cadres (numérique et géométrique).
Tâches de l'élève : Utiliser des propriétés et des théorèmes géométriques, mettre en équation un problème géométrique, expliquer sa démarche.

Barème proposé :
3 pts pour le rayon du tunnel,
3 pts pour la hauteur maximale admissible du camion
1 pt pour la conclusion
Tout schéma ou croquis pourra être valorisé.

Exercice 10 – *Carrément grandiose* – 10 points -3e
Thème : Grandeurs et mesures – Configuration du plan – Equations
Principaux éléments mathématiques travaillés : Théorème de Thalès, équation, homothétie, construction.

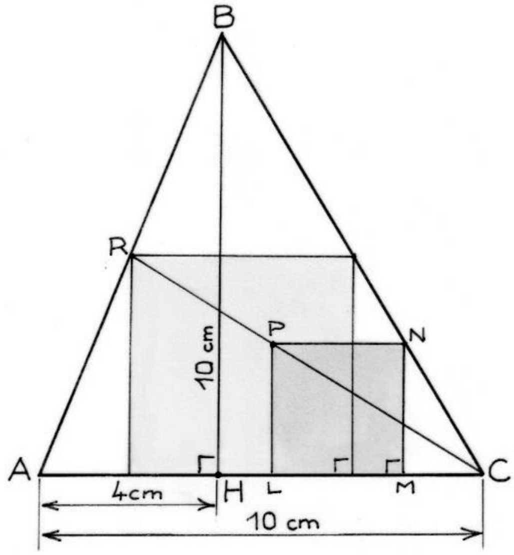
Corrigé :

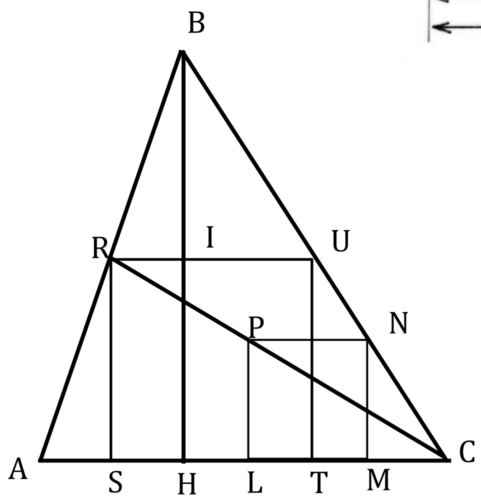
Soit RSTU le grand carré avec S et T sur [AC].
Soit I le point d'intersection entre [BH] et [RU].
[RU] est parallèle à [AC] donc :

$$\frac{BI}{RU} = \frac{BH}{AC} = 1$$

D'où RU = BI
Et comme RU = IH, on a BH = BI + IH = 2RU
Comme BH = 10, RU = 5.

La longueur du côté du plus grand carré qui répond à la question est 5 cm.





Compétences : Représenter Raisonner Communiquer
Capacités : Construire une figure plane, utiliser des théorèmes et des propriétés géométriques pour calculer des longueurs, utiliser des transformations pour calculer des grandeurs géométriques, utiliser l'effet d'une transformation du plan sur une figure, choisir et mettre en relation des cadres (numérique et géométrique).
Tâches de l'élève : Réaliser une construction précise, justifier, utiliser des propriétés géométriques, expliquer sa démarche.

Barème proposé :
2 pts pour la figure
8 pts pour le calcul et l'explication
Toute recherche sera valorisée.

Autres méthodes :

Niveau 5^e :
Placer un point D de manière à former un parallélogramme ACBD dont [AB] est une diagonale et [RC] la moitié de l'autre diagonale. Les diagonales du parallélogramme se coupent en leurs milieux. BH= 10 cm est la hauteur du parallélogramme, R est le point d'intersection des diagonales, donc R est à 5 cm perpendiculairement de la base [AC]. D'où le côté du carré : 5 cm.

Niveau 4^e :
On note x le côté du carré cherché. En utilisant les notations de la figure précédente : $BI = 10 - x$.
Avec le théorème de Thalès dans BAC et BRU :

$$\frac{x}{10} = \frac{10-x}{10}$$
$$10x = 100 - 10x$$
$$20x = 100$$
$$x = 5$$

Ou bien : Thalès dans AHB avec (RS)//(BH) et Thalès dans BHC avec (TU)//(BH).
$RI = SH = a \; et \; IU = HT = b$. Soit x le côté du carré.

$$\frac{x}{10} = \frac{4-a}{4} = \frac{6-b}{6}$$
$$\frac{4-a}{4} = \frac{6-b}{6}$$ donne $4\,b = 6a$

Ainsi
$$b = \frac{3}{2}a$$
Or $x = a + b$ d'où $a = \frac{2}{5}x$
En remplaçant dans : $$\frac{x}{10} = \frac{4-a}{4}$$
On obtient :
$$4x = 40 - 4x$$
$$x = 5$$

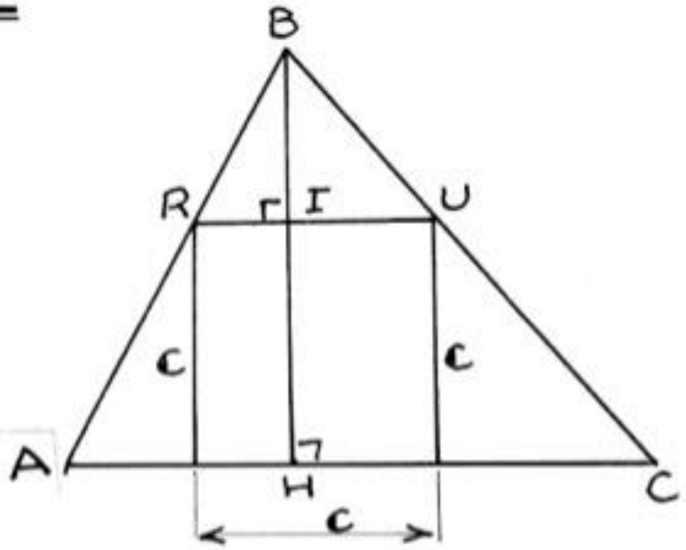
Niveau 3^e / 2nde : équations de droites

Avec un repère centré en A et le point D (-6 ;10) (de manière à former un parallélogramme ACBD dont [AB] est une diagonale et [RC] la moitié de l'autre diagonale), on écrit les équations de droites suivantes :
(AB) :
$$f(x) = \frac{10}{4}\,x = \frac{5}{2}\,x$$
(DC) :
$$g(x) = -\frac{10}{16}\,x + 10 - 6 \times \frac{5}{8} = -\,\frac{5}{8}x + \frac{25}{4}$$

En R, on a $f(x) = g(x)$
D'où
$$\frac{5}{2}x = -\,\frac{5}{8}x + \frac{25}{4}$$
$$20x = -\,5x + 50$$
$$x = 2$$
$$y_R = f(2) = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

Complément :

AIRE DU PLUS GRAND CARRE INSCRIT DANS UN TRIANGLE



Soit le triangle scalène ABC

Dans les triangles semblables :

BRI et BAH on a : $\frac{BI}{RI} = \frac{BH}{AH}$ d'où $RI = \frac{BI \times AH}{BH}$

BIU et BHC on a : $\frac{BI}{IU} = \frac{BH}{HC}$ d'où $IU = \frac{BI \times HC}{BH}$

D'où $RI + IU = \frac{BI \times (AH + HC)}{BH} = \frac{BI \times AC}{BH}$ (1)

On note : $c = RI + IU$ le côté du carré inscrit
$b = AC$ la base du triangle ABC
$h = BH$ la hauteur du triangle ABC

On a : $RI + IU = c$ et $BI = h - c$

La relation (1) s'écrit donc : $c = \frac{(h - c) \times b}{h}$ d'où : $c \times h + c \times b = h \times b$

On en déduit : $c \times (h + b) = h \times b$ d'où : $\boxed{c = \frac{h \times b}{h + b}}$

D'où l'aire du carré inscrit : $\boxed{c^2 = \left(\frac{h \times b}{h + b}\right)^2}$

Conclusion : **L'aire du plus grand carré inscrit à la base d'un triangle scalène, ne dépend que de la base choisie et de la hauteur correspondante**

Exercice 11 – *Jeu habile* – 5 points -2nde
Thème : Stratégie - Probabilité
Principaux éléments mathématiques travaillés : Probabilité, stratégie, chances.

Corrigé

On numérote les sachets 1 et 2.
$p_1(R)$ étant la probabilité d'obtenir une bille rouge dans le sachet 1
et $p_2(R)$ la probabilité d'obtenir une bille rouge dans le sachet 2.
La probabilité d'obtenir 2 billes rouges est égale à $p_1(R) \times p_2(R)$
Pour maximiser la probabilité on choisit d'avoir une seule bille rouge dans le sachet 1.
$p_1(R)$ est donc égale à 1.
Le produit des probabilités vaut :

$$1 \times \frac{4}{9}$$

Pour maximiser les chances de gagner, Frieda mettra 1 bille dans un des sachets et toutes les autres dans le second sachet.

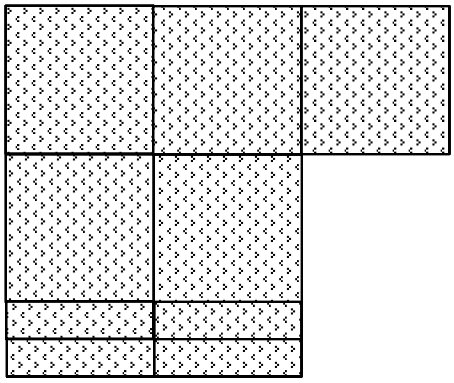
Compétences : Calculer Raisonner Modéliser Communiquer
Capacités : Choisir un cadre adapté pour présenter et résoudre un problème, effectuer des calculs et des comparaisons pour optimiser une solution, traduire en langage mathématique une situation réelle.
Tâches de l'élève : Modéliser le problème, résoudre par disjonction des cas, raisonner par essais-erreurs, tâtonner, expliquer sa démarche.

Barème proposé :
5 pts pour la bonne répartition Valoriser les recherches.

Exercice 12 – *Ça déchire !* – 7 points – 2nde
Thème : Nombres et calculs – Grandeurs et mesures
Principaux éléments mathématiques travaillés : Périmètre, calcul littéral, distributivité, développer.

Corrigé

Exercice qui demande de l'imagination et quelques tâtonnements.



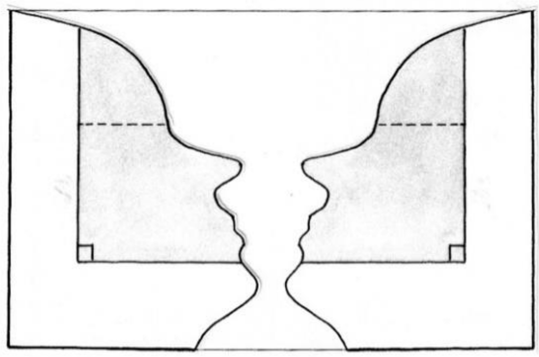
Une solution possible ci-contre.
Les carrés ont pour côté x et les rectangles ont pour largeur 1 et pour longueur x.
Le périmètre est bien de $10\,x + 4$
et l'aire de $5\,x^2 + 4\,x$.
Il existe d'autres solutions.

Coup de pouce si besoin :
Donner aux élèves les carrés x^2 (5 carrés) et les rectangles 4 cm sur x (4 rectangles)

Compétences : Chercher Calculer Représenter
Capacités : Calculer en utilisant le calcul littéral, calculer des grandeurs géométriques, organiser des données, tester.
Tâches de l'élève : Raisonner par essais-erreurs, tâtonner, utiliser le calcul littéral

Barème proposé :
3 pts pour un dessin correct
3 pts pour les dimensions en fonction de x
1 pt pour la justification

Complément : Notre dessinateur s'est amusé…



Une illusion d'optique bien connue

Exercice 13 – *Triplets* – 10 points – 2$^{\text{nde}}$GT
Thème : Nombres et calculs
Principaux éléments mathématiques travaillés : Calcul littéral, substitutions d'inconnues par une valeur numérique, décomposition en produit de facteurs premiers, diviseurs, triplets pythagoriciens.

Corrigé

Si $m = 5$ et $n = 4$, $m^2 = 5^2$ et $n^2 = 4^2$

alors $a = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$; $b = 2mn = 2 \times 5 \times 4 = 40$ et $c = m^2 + n^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

Si m = 5 et n = 4, on obtient le triplet pythagoricien primitif (9, 40, 41).

Si $b = 2\,024 = 2\times 1\,012$, alors $mn = 1012$. Or $1012 = 2^2 \times 11 \times 23$

À noter que si m et n sont pairs alors a, b et c sont aussi pairs et donc ne forment pas un triplet primitif. On peut donc éliminer les cas où m et n sont pairs.

On en déduit les écritures de 1012 en produits de deux facteurs avec au moins un facteur impair : $1012 = 1\times 1012 = 4\times 253 = 11\times 92 = 23\times 44$.

m	n	a	b	c
1012	1	**1 024 143**	**2024**	**1 024 145**
253	4	**63 993**	**2024**	**64 025**
92	11	**8 343**	**2024**	**8 585**
44	23	**1 407**	**2024**	**2 465**

D'où les **quatre triplets pythagoriciens primitifs, avec b = 2024, ci-dessus en gras.**

Compétences : Chercher Calculer
Capacités : Calculer avec des nombres de manière exacte, calculer une expression littérale en substituant les inconnues par des valeurs numériques.
Tâches de l'élève : Calculer, établir une liste exhaustive de cas favorables.

Barème proposé :
2 pts pour le triplet (9,40,41)
2 pts par triplet primitif solution. (4 triplets à 2 pts chacun)

Complément sur la tablette Plimpton 322

La tablette nommée Plimpton 322 est l'un des spécimens les plus connus parmi les nombreuses tablettes d'argile babyloniennes. Elle date d'environ 1800 avant J.-C.
Elle vient d'Irak et a été découverte lors de fouilles illégales puis rachetée vers 1922 par George Plimpton qui la légua à l'Université Columbia.

Cette tablette présente un tableau de nombres en écriture cunéiforme de quatre colonnes et quinze lignes en numération sexagésimale, alors utilisée en Mésopotamie.
Il permettait de résoudre certains problèmes de géométrie faisant appel aux **triplets pythagoriciens**.

Exercice 13 PRO - *Haricot mathémagique –10* points - 2nde Pro
Thème : Organisation et gestion de données - Tableur
Principaux éléments mathématiques travaillés : Puissance, tableur, tableau, suite.

Corrigé

Avec utilisation du tableur.

Date	Hauteur (cm)
01-avr	0,5
02-avr	1
03-avr	2
04-avr	4
05-avr	8
06-avr	16
07-avr	32
08-avr	64
09-avr	128
10-avr	256
11-avr	512
12-avr	1 024
13-avr	2 048
14-avr	4 096
15-avr	8 192
16-avr	**16 384**

À partir du 16 avril, la hauteur du haricot magique sera supérieure à la hauteur de la cathédrale de Strasbourg qui est de 14 200 cm environ.

Compétences : Calculer Représenter
Capacités : Calculer avec des nombres de manière exacte, représenter des données à l'aide d'un tableau, utiliser un tableur pour résoudre un problème, interpréter un résultat.
Tâches de l'élève : Utiliser un tableur, calculer.

Barème proposé :
8 pts pour le tableau
2 pts pour la rédaction de la solution.